

SPETTRO DI ONDE PIANE

L'utilizzo del Teorema di Equivalenza consente di rappresentare il campo irradiato da un'apertura come sovrapposizione di onde sferiche, ognuna irradiata da un dipolo magnetico elementare.

Vogliamo qui dimostrare che è possibile rappresentare il campo come sovrapposizione di altre soluzioni libere delle equazioni di Maxwell, e precisamente come sovrapposizione di onde piane.

Consideriamo un'onda piana $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$.

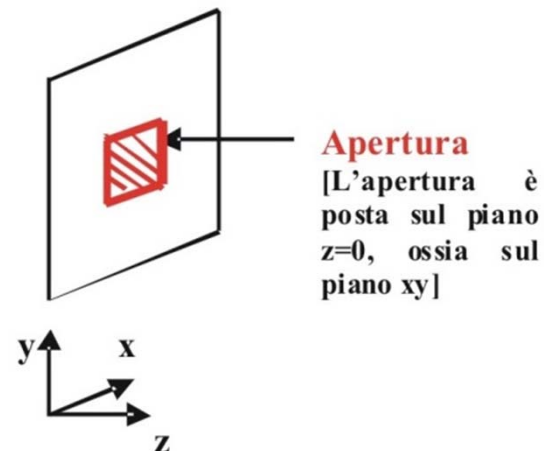
Tale onda è soluzione delle equazioni di Maxwell se sostituendone l'espressione, esse risultano verificate:

$$\nabla \times \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -j\omega\mu \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0$$



SPETTRO DI ONDE PIANE

Le precedenti sono le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti e densità di cariche.

Per i campi lontani, si ricordi che il laplaciano equivale a: $\nabla \rightarrow -jk\underline{i}_r = -j\underline{k}$

Quindi si ha, per la prima equazione:

$$-j\underline{k} \times \underline{E}_0 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = -j\omega\mu \underline{H} \quad \rightarrow \quad \underline{H} = \frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times \underline{E}_0 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}$$

Sostituendo nella seconda equazione si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H} &= -j\underline{k} \times \underline{H} = -j\underline{k} \times \left(\frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times \underline{E}_0 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} \right) = j\omega\varepsilon \underline{E}_0 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} \\ \rightarrow \quad -\frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}_0) &= \omega\varepsilon \underline{E}_0 \end{aligned}$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

La terza equazione è automaticamente verificata.

La quarta vale:

$$\nabla \cdot \underline{E}_0 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0$$

Dalla seconda si ha:

$$\frac{k^2}{\omega\mu} \underline{E}_0 = \omega\varepsilon \underline{E}_0 \quad \rightarrow \quad k^2 = \beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

Quindi, affinché l'onda piana $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0(u,v)e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, con il vettore $\underline{\mathbf{k}}$ di coordinate $\mathbf{k}=(u,v,w)$, sia un'onda piana elettromagnetica, devono verificarsi queste due condizioni:

$$1) \quad \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_0 = 0$$

$$2) \quad \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{k}} = u^2 + v^2 + w^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$$

La prima relazione mi dice che due sole componenti di $\underline{\mathbf{E}}_0$ sono indipendenti (l'altra componente, la componente z come vedremo, la ricavo dalla condizione sul prodotto scalare).

La seconda relazione mi dice che due componenti del vettore $\underline{\mathbf{k}}$ sono indipendenti (scelgo le componenti u e v di tale vettore, ossia le componenti trasverse alla direzione di propagazione).

SPETTRO DI ONDE PIANE

Essendo fissato k^2 , posto $k=(u,v,w)$, segue che $w^2=k^2-u^2-v^2$.

Inoltre, se $u^2+v^2 \leq k^2$, allora $w^2 \geq 0$, altrimenti $w^2 < 0$.

Nel primo caso scegliamo $w > 0$, nel secondo si pone $w = -j|w|$ in modo che ciascuna onda piana viaggi dal piano in $z=0$ verso l'infinito, attenuandosi.

Noto quindi il campo in un certo semispazio $z=0$, è possibile rappresentare il campo in un qualunque altro punto del semispazio $z > 0$ come sommatoria di onde piane del tipo $\underline{E}_0(u,v)e^{-jk \cdot r}$.

Vogliamo ora dimostrare che esiste una tale rappresentazione (ovvero che l'insieme delle onde piane è completo).

SPETTRO DI ONDE PIANE

Consideriamo allora:

$$\underline{E}(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \underline{\hat{E}}(u, v) e^{-j(ux+vy+wz)} du dv$$

includendo nella rappresentazione tutte le onde piane (proprie ed evanescenti).

Per $z > 0$ il campo E è univocamente determinato (in assenza di sorgenti) da $\underline{E}_t(x, y, 0)$.

Basterà quindi dimostrare che, $\forall \underline{E}_t(x, y, 0)$, esiste un $\underline{\hat{E}}(u, v)$

SPETTRO DI ONDE PIANE

Dovrà risultare:

$$\underline{E}_t(x, y, 0) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{\underline{E}}_t(u, v) e^{-j(ux+vy)} du dv$$

Ovvero \underline{E}_t è una trasformata di Fourier.

Invertendo la trasformata si ottiene:

$$\hat{\underline{E}}_t(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \underline{E}_t(x, y, 0) e^{j(ux+vy)} dx dy$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

Resta da calcolare \hat{E}_z .

Ma, essendo (dalla quarta equazione) $\underline{k} \cdot \underline{\hat{E}} = 0$, segue:

$$\hat{E}_z(u, v) = -\frac{u\hat{E}_x + v\hat{E}_y}{w}$$

e quindi si ottiene la rappresentazione cercata.

Ovviamente per \underline{H} si ha:

$$\underline{H}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times \underline{\hat{E}}(u, v) e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} du dv$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

La funzione $\hat{\underline{E}}(u, v)$ viene detta Spettro di Onde Piane associato ad $\underline{E}(x, y, z)$.

Quindi:

- noto il campo trasverso per $z=0$, $\underline{E}_t(x, y, 0)$ (ad esempio noto il campo su una apertura)
 - ricavo il campo $\hat{\underline{E}}_t(u, v)$ come trasformata di Fourier
 - poi ricavo la parte longitudinale di tale campo $\hat{\underline{E}}(u, v)$ dalla condizione di ortogonalità $\underline{k} \cdot \hat{\underline{E}} = 0$
 - ed infine ricavo il campo elettrico \underline{E} dall'antitrasformata di Fourier di $\hat{\underline{E}}(u, v)$.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Posso esprimere anche la potenza attraverso la superficie in $z=0$ in termini di spettro:

$$P_{z=0} = \frac{1}{2\zeta} (2\pi)^2 \left[\int_{D.V.} \int \frac{w}{\beta} \left| \hat{\underline{E}}(u, v) \right|^2 dudv + j \int_{D.I.} \int \frac{|w|}{\beta} \left(\left| \hat{\underline{E}}_t(u, v) \right|^2 - \left| \hat{\underline{E}}_z(u, v) \right|^2 \right) dudv \right]$$

Potenza Attiva *Potenza Reattiva*

Dalla precedente deriva che la potenza attiva dipende solo dallo spettro nel dominio visibile, mentre quella reattiva dipende solo dallo spettro nel dominio invisibile (ossia dipende dalle sole onde evanescenti).

SPETTRO DI ONDE PIANE

Si è detto che posso ricavare dallo spettro di onde piane il campo in un qualunque punto z_1 del semispazio $z \geq 0$.

Infatti posso scrivere:

$$\underline{E}(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \underline{\hat{E}}(u, v) e^{-j(ux+vy)} e^{-j(wz)} du dv$$

$\underline{\hat{E}}(u, v)$ è lo spettro per $z=0$

$$\underline{E}(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \underline{\hat{E}}(u, v) e^{-j(ux+vy)} e^{-jw(z-z_1)} e^{-jwz_1} du dv = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \underline{\hat{E}}_1(u, v) e^{-j(ux+vy)} e^{-jw(z-z_1)} du dv$$

$\underline{\hat{E}}_1(u, v) = \underline{\hat{E}}(u, v) e^{-jwz_1}$ è lo spettro in z_1

SPETTRO DI ONDE PIANE

Ovviamente a seconda del piano in cui io mi metto (il piano $z=0$ o qualunque altro piano $z=z_1$), il campo elettrico è lo stesso, mentre lo spettro di onde piane dipende da tale piano.

Si noti che la componente w del vettore d'onda è stata scelta fissando una determinata direzione di propagazione delle onde, e precisamente si è scelto che le onde piane viaggino in direzione positiva dell'asse z , ossia verso le z crescenti.

Quindi:

$$w = \begin{cases} |w| & \text{per una onda piana propria, che viaggia verso le } z \text{ positive} \\ -j |w| & \text{per una onda piana impropria, che si attenua nel verso delle } z \text{ positive} \end{cases}$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

Se io conoscessi lo spettro in $z_1 > 0$, non avrei problemi ad ottenere il campo in un qualunque altro punto z_2 in avanti (ossia per z crescenti, con $z_2 > z_1$), mentre non potrei ottenere tutto il campo ad esempio per $z=0$ (e in generale per qualunque punto $z_0 < z_1$), poiché non posso trasportare lo spettro all'indietro oltre un certo valore di u e v (lo posso fare per il dominio visibile, ma non per il dominio invisibile) in quanto, al crescere di u e v , w diventa immaginario e le onde ad esso associate diventano evanescenti e si attenuano esponenzialmente.

Infatti, a partire dal campo misurato in z_1 io dovrei ottenere il campo nel punto all'indietro z_0 , in cui le componenti dello spettro corrispondono ad onde evanescenti con costante di attenuazione w elevata, essendo u e v elevati.

Avrei dunque bisogno di una elevata precisione di misura del campo nel piano $z=z_1$ in cui esso è noto, per poter ottenere una buona stima del campo per $z=z_0$.

Pertanto la ricostruzione del campo a partire dalle misure del campo stesso in un certo piano $z=z_1$, non mi crea problemi per zone in avanti rispetto al piano $z=z_1$, (in cui ho onde piane progressive proprie e onde evanescenti che si attenuano per z positive) mentre me ne crea per zone all'indietro rispetto a $z=z_1$ (in cui ho onde evanescenti che sono esponenziali crescenti per z negative)

SPETTRO DI ONDE PIANE

Nel caso di più strati in cascata (è ad esempio il caso di una struttura a microstriscia), negli strati intermedi si hanno anche onde riflesse.

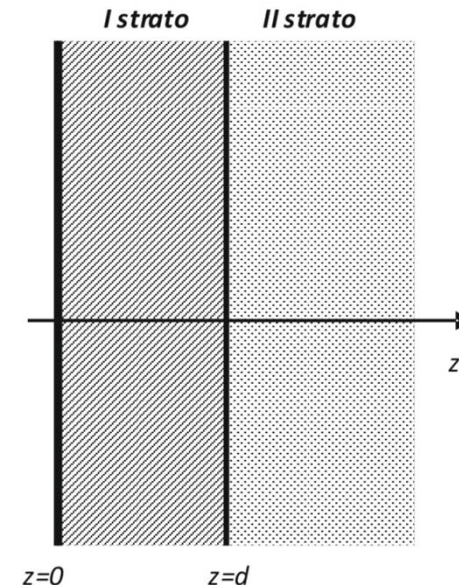
Quindi nella rappresentazione mediante spettro di onde piane si devono considerare due diversi spettri con valori di w opposti (uno associato all'onda progressiva, l'altro associato all'onda regressiva):

$$\underline{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\underline{\hat{E}}_1(u, v) e^{-j(ux+vy)} e^{-j(wz)} + \underline{\hat{E}}_2(u, v) e^{-j(ux+vy)} e^{j(wz)} \right] du dv$$

Nella precedente, in $z=0$ lo spettro è dato da:

$$\underline{\hat{E}}_1(u, v) + \underline{\hat{E}}_2(u, v)$$

Il primo termine di campo è associato a tutte le onde progressive, ed il secondo a tutte le onde riflesse.



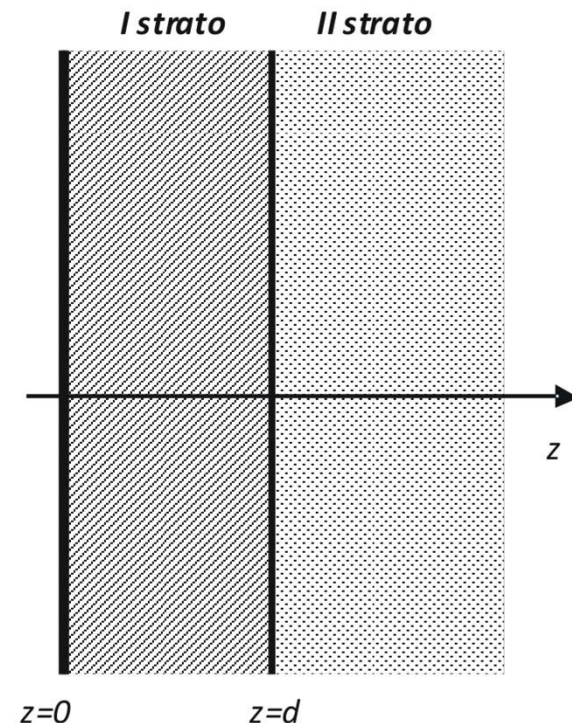
SPETTRO DI ONDE PIANE

In analogia alla propagazione in una linea di trasmissione è come se avessi il termine di campo per uno strato con onde progressive e riflesse:

$$V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} \rightarrow \underline{\hat{E}}_1(u, v) e^{-j(wz)} + \underline{\hat{E}}_2(u, v) e^{j(wz)}$$

Così come V^+ è associato all'onda progressiva e V^- all'onda riflessa, così pure lo sono $\underline{\hat{E}}_1(u, v)$ ed $\underline{\hat{E}}_2(u, v)$.

Quindi in tal caso, ossia nel caso in cui si ha a che fare con onde progressive ed onde riflesse, non mi basta conoscere il campo in un certo piano $z=z_0$ per ricostruirlo in tutto lo spazio, ma mi servono altre informazioni, ossia ho bisogno di considerare non solo le onde progressive, ma anche le onde regressive dovute alla riflessione all'interfaccia.



SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

La rappresentazione mediante spettro di onde piane costruisce il campo come somma di due parti.

- Le onde piane con $u^2+v^2 \leq k^2$ ($w>0$, dominio visibile) che sono onde che si propagano nella direzione di coseni direttori $(u',v',w')=(u/k,v/k,w/k)$ e viaggiano verso le z positive.
- Le onde piane con $u^2+v^2 > k^2$ ($w<0$, dominio invisibile) che sono onde evanescenti e si attenuano al crescere di z .

Vogliamo mostrare che il campo lontano dipende solo dal dominio visibile e che quindi la conoscenza dello spettro nel SOLO dominio visibile consente di calcolare il campo lontano.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

Consideriamo lo spettro di onde piane:

$$\underline{E}(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \underline{\hat{E}}(u, v) e^{-j(ux+vy+wz)} du dv$$

con:

$$\underline{\hat{E}}_t(u, v) = \Im(\underline{E}_t(x, y, 0)) \quad \text{e} \quad \begin{cases} \underline{k} \cdot \underline{\hat{E}} = 0 \\ \underline{k} \cdot \underline{k} = u^2 + v^2 + w^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \end{cases}$$

Mettiamoci nel caso $\beta|r| \gg 1$.

Nel caso monodimensionale (più semplice) l'integrale dello spettro può essere visto come il seguente integrale (con $\Omega \gg 1$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j\Omega g(x)} dx$$

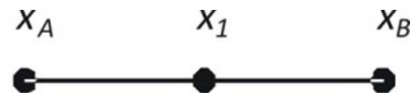
SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

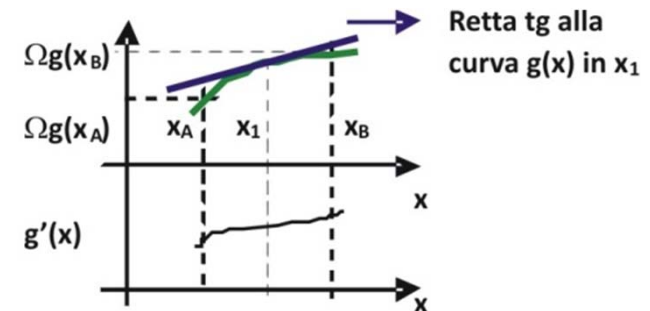
Posso spezzare l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ in intervalli più piccoli.

In particolare consideriamo un punto x_1 in cui supponiamo che la fase della funzione integranda sia crescente (e quindi la sua derivata prima deve essere diversa da zero: $g'(x_1) \neq 0$).

Allora posso considerare un intervallo $[x_A, x_B]$ in un intorno di x_1 tale che valga, per la fase della funzione integranda, la relazione:



$$\Omega g(x_B) = \Omega g(x_A) + 2\pi$$



e, sempre per l'ipotesi che la fase della funzione integranda sia crescente ($g'(x_1) \neq 0$), posso approssimare tale fase in un intorno del punto x_1 con la retta tangente in quel punto:

$$g(x) \cong g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1)$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

In tal caso l'integrale di partenza vale, nell'intervallo $[x_A, x_B]$:

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x) e^{j\Omega g(x)} dx \cong \underbrace{f(x_1)}_{\substack{\nearrow \\ \text{Se } f(x) \text{ è continua nell'intervallo } [x_A, x_B], \text{ posso portarla fuori dall'integrale}}} \int_{x_A}^{x_B} e^{j\Omega [g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1)]} dx = f(x_1) e^{j\Omega [g(x_1) - x_1 g'(x_1)]} \int_{x_A}^{x_B} e^{j\Omega g'(x_1)x} dx$$

Se $f(x)$ è continua nell'intervallo $[x_A, x_B]$, posso portarla fuori dall'integrale

Essendo la $g(x)$ lineare e crescente nell'intervallo $[x_A, x_B]$ (e infatti la ho approssimata con la sua retta tangente), e dato che vale la condizione (quindi fra il valore della fase in x_A e quello in x_B vi è uno scarto di un periodo), l'integrale dell'esponenziale è zero, e quindi è zero l'integrale nell'intervallo $[x_A, x_B]$.

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x) e^{j\Omega g(x)} dx \cong f(x_1) e^{j\Omega [g(x_1) - x_1 g'(x_1)]} \int_{x_A}^{x_B} e^{j\Omega g'(x_1)x} dx = 0$$

←
E' l'integrale di un esponenziale valutato nel periodo, ed è quindi nullo

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

Questo discorso vale solo quando la fase è una funzione crescente (e pertanto quando $g'(x_1) \neq 0$) e quando la funzione $f(x)$ non è discontinua.

Infatti, se la $g(x)$ avesse derivata prima nulla in x_1 , allora in un suo intorno essa avrebbe o un massimo o un minimo, e comunque non sarebbe crescente, pertanto non sarebbe possibile trovare un intorno $[x_A, x_B]$ centrato in x_1 tale che fra il valore della fase in x_A e quello in x_B vi sia uno scarto di un periodo ($\Omega g(x_B) = \Omega g(x_A) + 2\pi$) e quindi l'integrale in tale intervallo non sarebbe nullo.

Analogamente, se la $f(x)$ fosse discontinua nel punto x_1 , tale funzione non si potrebbe portare fuori dall'integrale, che quindi non sarebbe nullo (anche se $g(x)$ fosse crescente).

Quindi i contributi all'integrale fra $-\infty$ e $+\infty$ che sono diversi da zero sono dovuti solo ai punti a fase stazionaria (ossia i punti in cui $g'(x)=0$), ed ai punti in cui la $f(x)$ è discontinua.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

Tale integrale può quindi essere espresso dalla stima asintotica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j\Omega g(x)} dx \cong \sum_d \frac{1}{\sqrt{\Omega}} F(x_d) + \sum_s \frac{1}{\Omega} F(x_s)$$

dove nella precedente i punti x_s sono i punti a fase stazionaria (ossia i punti in cui si ha $g'(x)=0$) ed i punti x_d sono i punti di discontinuità della $f(x)$.

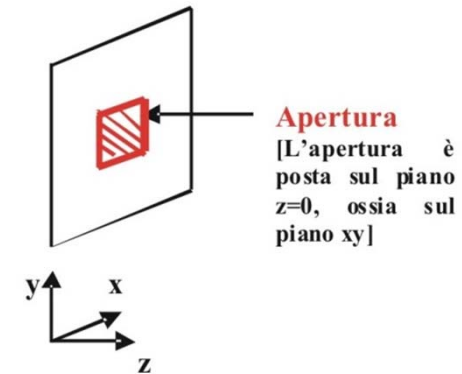
Tale stima è tanto migliore quanto più Ω è grande, inoltre essa ha l'espressione appena trovata solo se i punti di discontinuità e quelli a fase stazionaria sono isolati; in caso contrario l'espressione assume una forma un pò diversa.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

Nel semplice caso da noi esaminato, in cui abbiamo rappresentato il campo irradiato da un'apertura mediante lo spettro di onde piane, si ha a che fare con l'integrale:

$$\underline{E}(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \underline{\hat{E}}(u, v) e^{-j(ux+vy+wz)} du dv$$



Per tale situazione si trova che, fissato il vettore che rappresenta il punto campo \underline{r} (e quindi fissata la direzione \underline{i}_r in cui valuto il campo e la distanza r), ho un solo punto di fase stazionaria nel calcolo dell'integrale dello spettro per $\beta|r|$ che tende ad infinito. Questo punto di fase stazionaria corrisponde alla direzione $\underline{i}_r = \underline{i}_k$.

In pratica il contributo principale al campo nella direzione \underline{i}_r è dato dall'onda piana che punta verso la direzione \underline{i}_r stessa, il che è ragionevole. Il punto a fase stazionaria è dunque nel dominio visibile. 22

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

E' sufficiente dunque la conoscenza dello spettro nel dominio visibile per calcolare il campo lontano mediante il metodo a fase stazionaria.

Quindi il campo lontano valutato mediante il metodo della fase stazionaria vale:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{2\pi j}{\beta r} \beta^2 \cos \mathcal{G} e^{-j\beta r} \hat{\underline{E}}(\underline{i}_r)$$

con $\hat{\underline{E}}(\underline{i}_r) = \hat{\underline{E}}(u_0, v_0)$ spettro valutato nel punto a fase stazionaria, ed u_0 e v_0 coordinate del punto a fase stazionaria normalizzate ($u_0 = u/k$, $v_0 = v/k$).

Sappiamo che la funzione (parte trasversa dello spettro di onde piane) è una funzione a banda limitata (ha integrale diverso da zero solo in un certo intervallo) e che la sua banda è pari alle dimensioni dell'apertura.

Dato che la banda di una funzione mi dice quanto rapidamente essa può variare, più è grande l'apertura, più varia e più di conseguenza varia il campo lontano.

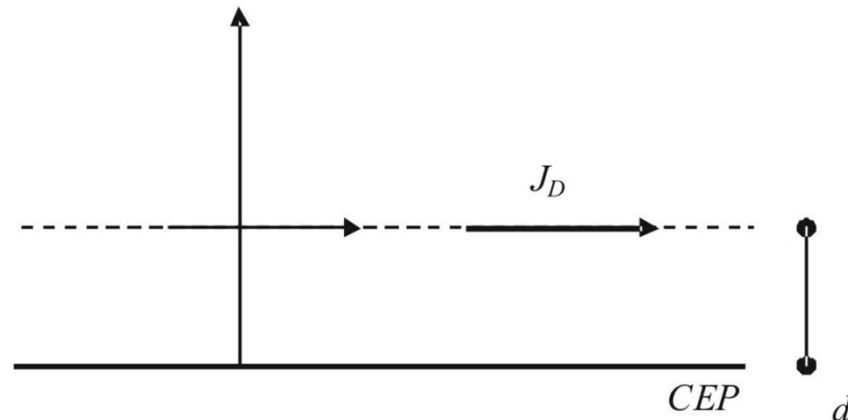
SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

ESEMPIO: Mezzo Stratificato (Antenna Stampata)

In molte applicazioni occorre calcolare il campo in un mezzo piano stratificato, prodotto da un dipolo (ovviamente per sovrapposizione degli effetti, questo problema risolve anche il problema del campo prodotto da una assegnata distribuzione di sorgenti), e quindi la funzione di Green di un mezzo stratificato.

Vediamo qui il caso più semplice, di un dipolo orizzontale posto sul piano di interfaccia tra il vuoto ed un dielettrico di spessore d e indice di rifrazione n , posto su di un piano di CEP.



SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

ESEMPIO: Mezzo Stratificato (Antenna Stampata)

Le espressioni del campo di uno strato dielettrico si ottengono per antitrasformazione a partire dallo spettro di onde piane associato alla struttura.

L'integrale relativo può essere poi calcolato asintoticamente per ottenere il campo lontano (che per la struttura analizzata può significare sia campo in aria a grande distanza, sia campo nel dielettrico in direzione radiale a grande distanza).

Posso usare il metodo della fase stazionaria per valutare il campo a grande distanza, e per fare ciò mi servono i punti di discontinuità dello spettro di onde piane associato al campo ed i punti a fase stazionaria.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

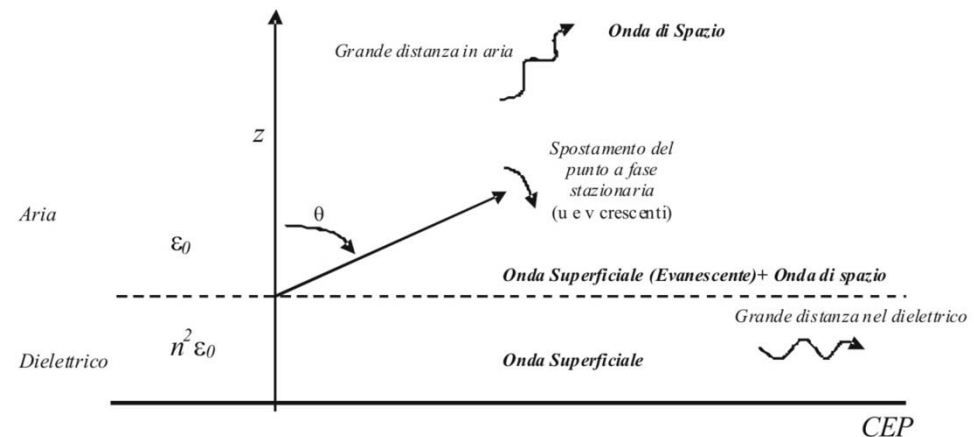
ESEMPIO: Mezzo Stratificato (Antenna Stampata)

Si dimostra che i punti singolari associati alla struttura sono nella zona dell'invisibile, molto prossimi al confine tra visibile ed invisibile.

I punti di fase stazionaria sono invece dati da:

$$\frac{u}{k_0} = \xi', \quad \frac{v}{k_0} = \eta'$$

essendo ξ' , η' i primi due coseni direttori della direzione di interesse.



Se tale direzione di interesse è abbastanza lontana dal piano di interfaccia, ovvero se $(\xi')^2 + (\eta')^2$ è sufficientemente minore di 1, non vi sono problemi.

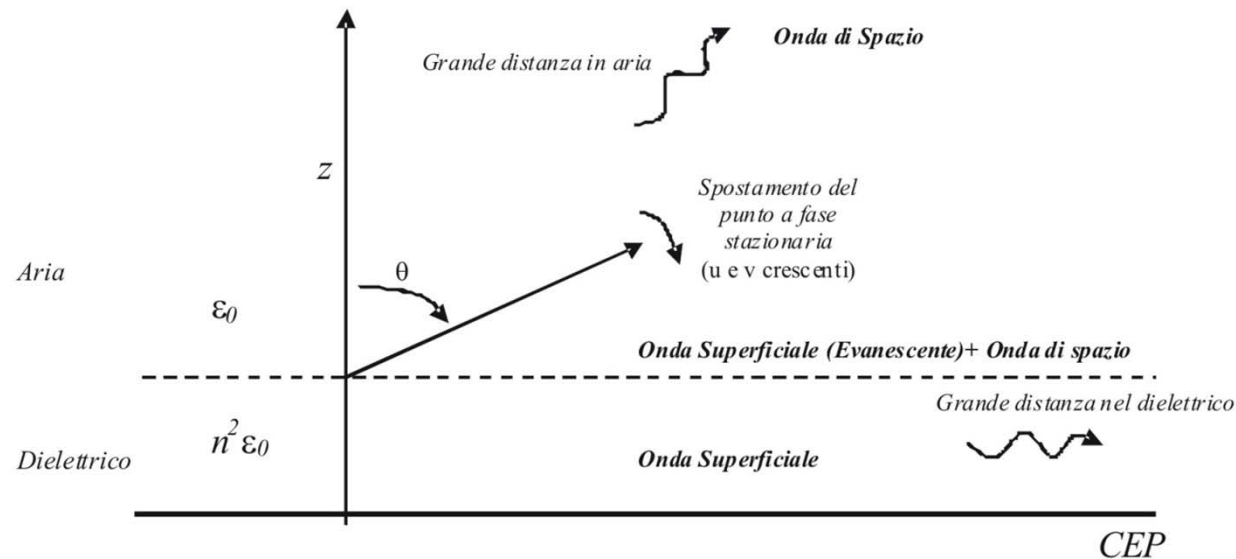
Vicino al piano, invece, il punto stazionario si trova prossimo al polo e questo costringe a valutazioni diverse.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

ESEMPIO: Mezzo Stratificato (Antenna Stampata)

Fisicamente il punto di fase stazionaria corrisponde al campo nello spazio libero (onda di spazio), mentre il polo corrisponde ad un campo che viaggia nel dielettrico (onda superficiale).

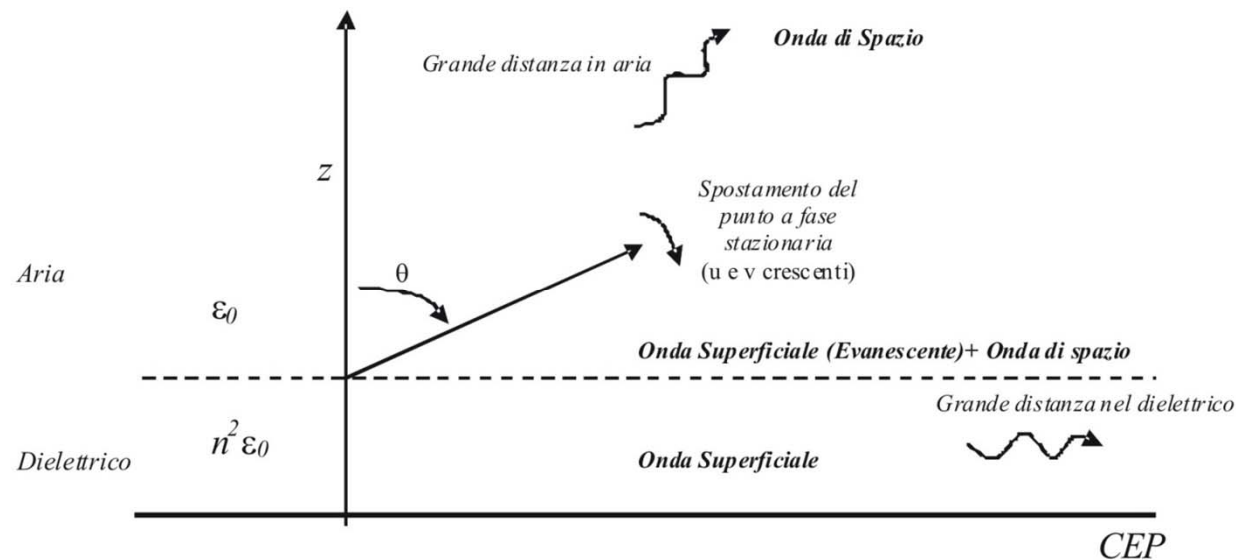


SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

ESEMPIO: Mezzo Stratificato (Antenna Stampata)

Per angoli θ sufficientemente piccoli, l'onda superficiale, che si attenua esponenzialmente nel vuoto in direzione z , non interagisce con quella di spazio. Vicino all'interfaccia, invece, vi è una forte interferenza fra le due onde. All'interno del dielettrico, infine, resta la sola onda superficiale.



SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

ESEMPIO: Mezzo Stratificato (Antenna Stampata)

Riassumendo, quindi: i punti a fase stazionaria si trovano solamente nella zona del visibile (la derivata della fase non si annulla mai nel dominio invisibile); i poli si trovano solamente nella zona dell'invisibile, anche se molto prossimi al visibile.

A grande distanza dal dielettrico il campo è dato da un'onda piana di spazio.

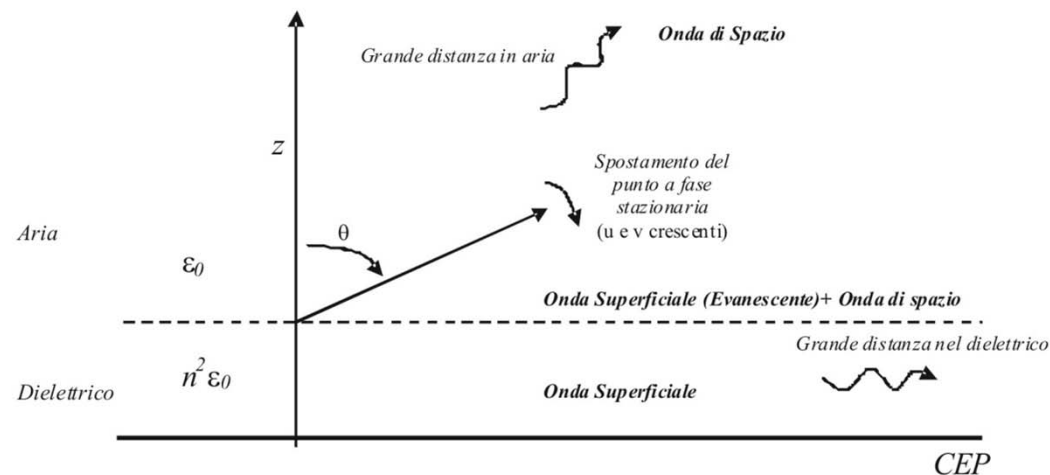
Man mano che u e v aumentano (e quindi ci si sposta verso l'invisibile), il punto stazionario tende ad avvicinarsi sempre più al dielettrico. In prossimità del dielettrico, nella zona in aria, il punto a fase stazionaria interagisce col polo, quindi per angoli θ prossimi a 90° si ha interferenza fra l'onda piana in aria e l'onda superficiale del dielettrico, la quale onda è confinata nel dielettrico e si attenua molto rapidamente in direzione z non appena esce dal dielettrico; per questo motivo, solo in prossimità della superficie di confine fra dielettrico ed aria ci può essere interazione fra punto a fase stazionaria e polo, mentre a grandi distanze dall'interfaccia il contributo della singolarità è estinto e rimane solo quello della fase stazionaria.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Calcolo del Campo Lontano : Metodo della Fase Stazionaria

ESEMPIO: Mezzo Stratificato (Antenna Stampata)

Riguardo al campo lontano nel dielettrico, dato che nella zona interna al dielettrico non ci sono punti a fase stazionaria, l'unico contributo all'integrale dello spettro nella valutazione del campo lontano nella zona del dielettrico (corrispondente al dominio invisibile) mi è dato dal polo (che corrisponde all'onda superficiale), e quindi nel dielettrico ho solo propagazione dell'onda superficiale.



SPETTRO DI ONDE PIANE

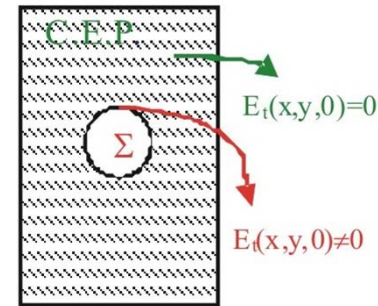
Campionamento

Il campo di una apertura può essere calcolato tramite lo spettro di onde piane.

Sia Σ una apertura in un CEP nel piano (x,y) e sia $E_{0t}(x,y)$ il campo tangente (supposto noto) su tale apertura.

Il campo tangente sul CEP al di fuori di Σ è nullo.

Lo spettro di onde piane vale:



$$\hat{\underline{E}}_t(u,v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}_{0t}(x,y) e^{j(ux+vy)} dx dy \quad \text{componente trasversa dello spettro}$$

$$\hat{E}_z = -\frac{\underline{k}_t \cdot \hat{\underline{E}}_t}{w} \quad \text{con } \underline{k}_t = (u\underline{i}_x + v\underline{i}_y) \quad \text{componente } z \text{ dello spettro}$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

Campionamento

A grande distanza il campo è ottenibile col metodo della fase stazionaria, e vale:

$$\underline{E}_{\infty}(r, \vartheta, \varphi) = 2\pi j \frac{k_0 \cos \vartheta}{r} e^{-jkr} \hat{\underline{E}}(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi, k_0 \sin \vartheta \sin \varphi)$$

Esiste una relazione di trasformata di Fourier tra il campo tangente sull'apertura ed il diagramma di irradiazione $\underline{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)$, a patto di usare come variabile per quest'ultimo, al posto di θ, φ le variabili: $u_0 = \sin \theta \cos \varphi$, $v_0 = \sin \theta \sin \varphi$.

L'ulteriore fattore $\cos \theta$ non ha sostanzialmente effetto sul diagramma di irradiazione, salvo che per aperture molto piccole, che qui non consideriamo.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Campionamento

D'altra parte lo spettro è una funzione a banda limitata, nel senso che la sua trasformata di Fourier è nulla fuori da Σ .

Segue quindi che il diagramma di irradiazione è una funzione a banda (spaziale e bidimensionale) limitata, con una banda tanto più grande quanto più grande è l'apertura Σ .

Questa proprietà consente di rappresentare il campo mediante serie di campionamento.

Supponiamo che Σ sia compresa nel rettangolo $[-D_x/2, D_x/2] \times [-D_y/2, D_y/2]$.

Allora la banda di u è pari a $D_x/2$ come funzione di u ed a $D_y/2$ come funzione di v .

SPETTRO DI ONDE PIANE

Campionamento

Pertanto, fissato v al valore \bar{v} , possiamo rappresentare $\hat{E}(u, \bar{v})$ come serie di campionamento, a patto di campionare con un passo superiore al rate di Nyquist:

$$\Delta u \leq 2\pi / Dx$$

Si ottiene in tal modo:

$$\hat{E}(u, \bar{v}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{E}(n\Delta u, \bar{v}) \sin c \frac{Dx}{2} (u - n\Delta u)$$

Ovviamente lo stesso discorso si può ripetere per i vari campioni come funzione di v , ottenendo infine, purchè valga anche per il campionamento in v la condizione sul rate di Nyquist ($\Delta v \leq 2\pi / Dy$):

$$\hat{E}(u, v) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \hat{E}(n\Delta u, m\Delta v) \sin c \frac{Dx}{2} (u - n\Delta u) \sin c \frac{Dy}{2} (v - m\Delta v)$$

SPETTRO DI ONDE PIANE

Campionamento

Questa relazione implica che si può conoscere il campo di una apertura in ogni punto qualora sia noto il campo nei punti di campionamento.

Le applicazioni sono varie.

Possiamo misurare il campo solo nei punti di campionamento e ricostruirlo poi negli altri punti, riducendo il tempo di misura.

In alternativa è possibile misurare anche altri punti.

Queste misure “ridondanti” possono essere utilizzate ad esempio per ridurre gli errori di misura.

Molte tecniche di calcolo forniscono un solo valore di campo alla volta. L'uso della serie di campionamento consente di calcolare solo i punti di campionamento, in genere con un notevole risparmio di tempo di calcolo.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Campionamento

Nel caso in cui si debba sintetizzare un dato diagramma di irradiazione, non è possibile specificare i valori richiesti di campo lontano su di un reticolo più fitto di quello fornito dal rate di Nyquist.

In altri termini, fissata una zona nello spazio di (u_0, v_0) (le variabili di $\underline{\mathbf{E}}_\infty$), i gradi di libertà del campo irradiato sono fissati e pari al numero di campioni che cadono in quel dominio.

Se occorrono più gradi di libertà, va incrementato il dominio Σ , ovvero la banda del campo.

SPETTRO DI ONDE PIANE

Campionamento

Per i campi prodotti da sorgenti diverse la proprietà di essere a banda limitata non vale più esattamente.

Si può tuttavia dimostrare che, se le sorgenti sono racchiuse in una sfera di raggio R_0 , allora il campo prodotto (a meno di un fattore e^{-jkr}) può essere approssimato con una funzione a banda limitata con banda χR_0 , essendo $\chi > 1$, con un errore che tende esponenzialmente a zero con χ . (Usualmente bastano valori di χ dell'ordine di $1.1 \div 1.2$ per avere rappresentazioni accurate)

Il limite maggiore della serie di campionamento è però la necessità di conoscere i campioni in tutto lo spazio (n ed m vanno da $-\infty$ a $+\infty$).

Esistono tuttavia serie “autotroncanti” in cui bastano pochi campioni (una decina) vicino al punto campo per calcolare quest'ultimo, a patto di incrementare leggermente la banda.